

L0 de MQ1 17/03/2010

Curso de Mecânica Quântica 1 - 2010.1 - UFF - Prof. Marco Moriconi

Esta lista não será cobrada em testes, mas procure fazê-la integralmente, pois ela cobre uma boa parte das ideias de álgebra linear que são importantes para o curso.

1. Em sala definimos o produto interno como um mapeamento que leva dois vetores, que são elementos do espaço de Hilbert, em um escalar (número complexo). Em geral podemos escrever: $F(|\psi\rangle, |\chi\rangle) = \langle\psi|\chi\rangle$. Como vimos, a função F é linear em $|\chi\rangle$, satisfaz à $F^*(|\psi\rangle, |\chi\rangle) = F(|\chi\rangle, |\psi\rangle)$, $F(|\psi\rangle, |\psi\rangle) \geq 0$, e é zero somente se o próprio vetor for nulo. Resolva os seguintes itens:
 - (a) Mostre que o produto interno é anti-linear no primeiro argumento.
 - (b) Se $\mathbf{A}$ é um operador hermiteano e $|\psi\rangle$ um autovetor com autovalor λ , podemos definir o subespaço de vetores ortogonais a $|\psi\rangle$, $V_\psi^\perp$. Mostre que $V_\psi^\perp$ é um subespaço vetorial e que é invariante sob a ação de $\mathbf{A}$.
 - (c) considere dois operadores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Mostre que $\text{tr}(\mathbf{A}^\dagger \mathbf{B})$ define um produto interno.
 - (d) a norma de um vetor $|\psi\rangle$ é representada por $\| |\psi\rangle \|$, e que satisfaz às seguintes propriedades: 1) $\| |\psi\rangle \| \geq 0$, 2) se é zero então o vetor é o vetor nulo, 3) a desigualdade triangular: $\| |\psi\rangle + |\phi\rangle \| \leq \| |\psi\rangle \| + \| |\phi\rangle \|$. Mostre que a operação definida por $\| |\psi\rangle \| = \sqrt{\langle\psi|\psi\rangle}$ é uma norma.
2. Considere dois operadores lineares $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Mostre que:
 - (a) $(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\dagger = \mathbf{A}^\dagger + \mathbf{B}^\dagger$.
 - (b) $(\mathbf{AB})^\dagger = \mathbf{B}^\dagger \mathbf{A}^\dagger$.
 - (c) Um operador anti-hermiteano $\mathbf{A}$ satisfaz à $\mathbf{A}^\dagger = -\mathbf{A}$. Mostre que todo operador pode ser escrito como a soma de um operador hermiteano com um operador anti-hermiteano.
 - (d) Seja $\mathbf{A}$ um operador linear qualquer, mostre que $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A}$ é hermiteano e que seus autovalores são sempre maiores ou iguais a zero. Operadores com essa propriedade são chamados de operadores positivos.
3. Um operador linear $\mathbf{A}$ é chamado normal se $\mathbf{A}^\dagger \mathbf{A} = \mathbf{A} \mathbf{A}^\dagger$. Mostre que operadores normais (em espaços vetoriais de dimensão finita) sempre podem ser diagonalizados. Operadores hermiteanos e unitários são exemplos de operadores normais.
4. Mostre a propriedade cíclica do traço, isto é, para dois operadores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$, temos $\text{tr}(\mathbf{AB}) = \text{tr}(\mathbf{BA})$. Use este resultado para mostrar que o traço do comutador é zero.
5. Considere um conjunto de 4 transformações lineares hermiteanas $\{\mathbf{M}_i\}$, com $i = 1, \dots, 4$, em um espaço vetorial de dimensão n , e que satisfazem às seguintes relações:

$$\mathbf{M}_i \mathbf{M}_j + \mathbf{M}_j \mathbf{M}_i = 2\delta_{ij} \mathbf{1}, \quad (1)$$

onde $\mathbf{1}$ é a identidade.

- (a) Mostre que os autovalores de $\mathbf{M}_i$, para todo i , são ± 1 .

- (b) Mostre que $\text{tr } \mathbf{M}_i = 0$, para todo i , e que, portanto, estas transformações só podem existir em espaços vetoriais de dimensão par.

6. Considere a matriz $\mathbf{\Omega}$ dada, na base canônica, por:

$$\mathbf{\Omega} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2)$$

- (a) Encontre os autovalores e autovetores de $\mathbf{\Omega}$. Denote os autovalores por λ_+ e λ_- e os autovetores (normalizados) associados por $|+\rangle$ e $|-\rangle$.
- (b) Mostre que $\langle + | - \rangle = 0$. Verifique a relação de completeza $|+\rangle\langle +| + |-\rangle\langle -| = \mathbf{1}$. Calcule o traço de $\mathbf{\Omega}$ diretamente da sua definição e mostre que é igual à soma de seus autovalores. Isso vale em geral para operadores hermiteanos?
- (c) Defina o operador $\mathbf{U}$ da seguinte maneira: as colunas deste operador são os autovetores de $\mathbf{\Omega}$. Verifique a unitariedade deste operador. Mostre que $\mathbf{U}^\dagger \mathbf{\Omega} \mathbf{U}$ é diagonal.
7. Suponha que $[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \alpha \mathbf{B}$. Mostre que se $|\psi\rangle$ é um autovetor de $\mathbf{A}$ com autovalor λ , então, se $\mathbf{B}|\psi\rangle$ for diferente de zero, então será um autovetor com autovalor $\lambda + \alpha$.
8. Considere uma função $f(z)$ analítica, isto é, que pode ser expandida em série de potências: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Podemos definir uma função de um operador por meio desta série de potências, ou seja, para um operador $\mathbf{A}$, temos $f(\mathbf{A}) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \mathbf{A}^n$. Não vamos nos deter em questões (importantes) sobre a convergência destas funções de operadores, mas usar esta formulação na prática.
- (a) Mostre que todo operador unitário $\mathbf{U}$ pode ser escrito como $\mathbf{U} = \exp(i\mathbf{H})$, onde $\mathbf{H}$ é hermiteano.
- (b) Se definirmos $\mathbf{U}(\lambda) = \exp(i\lambda\mathbf{H})$, mostre que $\frac{d}{d\lambda} \mathbf{U}(\lambda) = i\mathbf{U}(\lambda)\mathbf{H}$.
- (c) Mostre que $\exp(\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-\mathbf{A}) = \mathbf{B} + [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{1}{2!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \frac{1}{3!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]]] + \dots$ [sugestão: considere a função $F(\lambda) = \exp(\lambda\mathbf{A})\mathbf{B}\exp(-\lambda\mathbf{A})$ e calcule a série de Taylor ao redor de $\lambda = 0$.]
9. Quando tratamos de números complexos podemos usar a chamada decomposição polar, $z = \rho \exp(i\phi)$, onde ρ e ϕ são reais. É possível estabelecer uma forma análoga para operadores: mostre que um operador qualquer $\mathbf{A}$ pode sempre ser escrito como $\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{U}$, onde $\mathbf{P}$ é um operador positivo e $\mathbf{U}$ é um operador unitário. Mostre que se $\mathbf{A}$ é inversível, então essa decomposição é única. [É possível escrever $\mathbf{A}$ como $\mathbf{U}'\mathbf{P}'$, para outros operadores.]
10. Um operador de projeção $\mathbf{P}$ é um operador hermiteano que satisfaz à $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.
- (a) Mostre que os autovalores de $\mathbf{P}$ são 1 ou 0.
- (b) Mostre que $\mathbf{P}$ sempre pode ser escrito como $\mathbf{P} = \sum_{i=1}^k |e_i\rangle\langle e_i|$, onde os $|e_i\rangle$ são vetores ortonormais e $1 \leq k \leq n$, e n é a dimensão do espaço vetorial.
11. Forneça um exemplo de um espaço vetorial de dimensão n que não seja $\mathbb{C}^n$.
12. Escreva a matriz da transformação linear que projeta os vetores de $\mathbb{R}^3$ no plano $x + y + z = 0$. [sugestão: encontre o vetor normal ao plano e decomponha um vetor arbitrário em uma componente normal e uma paralela ao plano.]

13. Responda se cada um dos itens a seguir é verdadeiro ou falso. Caso um item seja verdadeiro, argumente porque, caso seja falso, dê um contra-exemplo.

- (a) Todo operador em um espaço vetorial complexo de dimensão n possui n autovetores.
- (b) Se dois operadores comutam, então eles podem ser diagonalizados simultaneamente.
- (c) Um operador diagonalizável é, necessariamente, normal.
- (d) Todo operador pode ser escrito como uma combinação dos produtos externos $|e_i\rangle\langle e_j|$.

14. Considere os operadores σ_x e σ_z dados por

$$\sigma_x = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Encontre um vetor $|\psi\rangle$ tal que $\sigma_x|\psi\rangle = \lambda\sigma_z|\psi\rangle$, para algum λ . Em geral, dados dois operadores quaisquer A e B em um espaço de n dimensões, é possível encontrar um vetor $|\psi\rangle$ tal que $A|\psi\rangle = \lambda B|\psi\rangle$, para algum λ ?

15. Considere os operadores a seguir:

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Para cada uma delas, diga se ela é diagonalizável e se é invertível.

16. Mostre que se uma matriz A comuta com qualquer matriz dada, então A é proporcional à identidade.